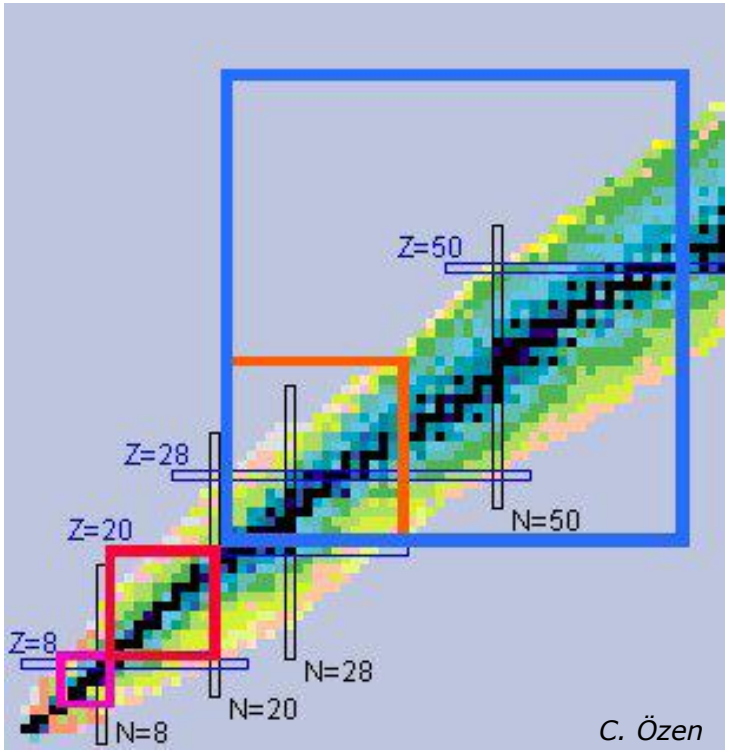
Das Schalenmodell mit Monte-Carlo Methoden

Theoretisches Seminar Kernstruktur und nukleare Astrophysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Bastian Löher

Gliederung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Motivation
  - Wiederholung Schalenmodell
  - Problematik
- Das Schalenmodell mit Monte-Carlo Methoden
- Anwendungsbeispiele

Einführung
Schalenmodell Wdh.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_{i}^{A} \hat{t}_i}_{\text{Einteilchen}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{ij}^{A} \hat{v}_{ij}}_{\text{Kopplung}}$$

- Ansatz eines mittleren Potentials U mit Restwechselwirkung

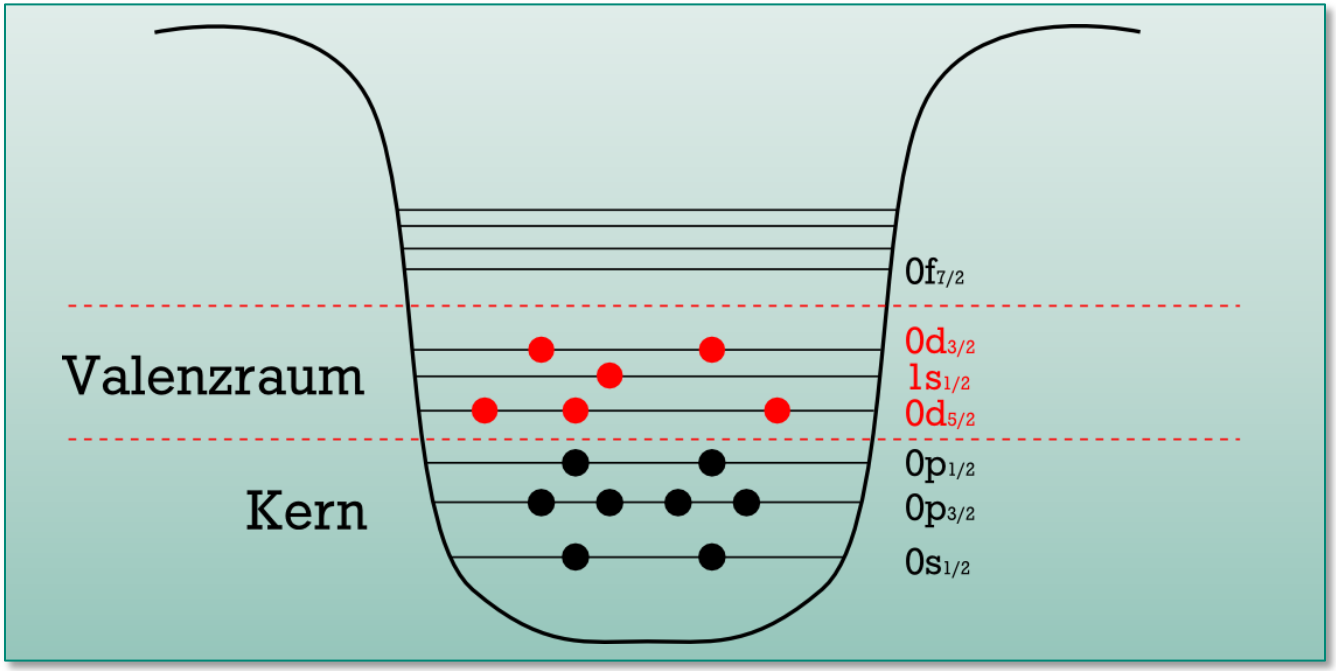
$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{res} = \sum_{i}^{A} (\hat{t}_i + \hat{U}_i) + \frac{1}{2}\sum_{ij}^{A} (\hat{v}_{ij} - \hat{U}_i \delta_{ij})$$

  - $\hat{U}_i$ sind dabei Harmonisches Oszillatorpotential, WOODS-SAXON, ...
  - $\hat{H}_0$ kann exakt durch Diagonalisierung gelöst werden

Einführung
Schalenmodell Wdh.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schematische Vorstellung



- Restwechselwirkung stark zwischen Teilchen im Valenzraum
  - nicht vernachlässigbar!

Einführung
Schalenmodell Wdh.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Übergang in 2. Quantisierung

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma}$$

  - Fasse n, l, j, m, m_t in α zusammen
  - a und $a^{\dagger}$ sind Einteilchenerzeuger und –vernichter
  - ε: Einteilchen-Energien,
  - V: ungekoppelte Zweiteilchen-Matrixelemente
  - Berechnung von V auf verschiedene Arten möglich

Einführung
Schalenmodell Wdh.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ablauf

1. Wähle Konfigurationsraum:
   - Anzahl N_s freier Einteilchenzustände (getrennt für n und p)
   - Anzahl N_v an Valenznukleonen (jeweils n und p)
2. Erzeuge Einteilchen-Valenzbasis $\left|\alpha\right\rangle = \left|nljmm_t\right\rangle$
3. Generiere Slaterdeterminanten $\left|\Psi\right\rangle_a = \hat{A}\left|\alpha_1\right\rangle \otimes \left|\alpha_2\right\rangle \otimes \cdots \left|\alpha_A\right\rangle$
4. Berechne Hamiltonmatrix $H_{ij} = {}_a\left\langle \Psi_j \middle| \hat{H} \middle| \Psi_i \right\rangle_a$
5. Diagonalisiere **H**

⇨ Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführung
Problematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Anzahl Slaterdeterminanten definiert Dimension von **H**
  - Kombinatorik:

$$D \approx \begin{pmatrix} N_s^p \\ N_v^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_s^n \\ N_v^n \end{pmatrix}$$

  - z.B. ^{60}Zn in pf-Schale: $N_s=20$, $N_v=10$ $D \approx 3.4 \times 10^{10}$
- Symmetrieüberlegungen verringern D ein wenig
  - Faktor 10 oder 100
- Heute berechenbar: $D = 10^5 \ldots 10^9$

⇨ Andere Methoden nötig!

Monte-Carlo Methoden Überblick

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wie kann das Problem gelöst werden?

1. Betrachte thermodynamische Erwartungswerte

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle = \frac{Tr[\hat{U}\hat{\Omega}]}{Tr[\hat{U}]},$$

2. Behandle Zeitentwicklung in imaginärer Zeit

$$\hat{U} = e^{-\beta \hat{H}}, \quad \beta = \frac{1}{T}$$

3. Bringe $\hat{H}$ auf Einteilchenform

$$\hat{H} = \varepsilon \hat{O} + \frac{1}{2} V \hat{O}\hat{O},$$

4. Linearisiere $\hat{H}$

$$\hat{h} = \varepsilon \hat{O} + sV\sigma\hat{O},$$

5. Löse die auftretenden Integrale

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle = \frac{\int D\sigma W_\sigma \Omega_\sigma}{\int D\sigma W_\sigma},$$

Monte-Carlo Methoden
1: Thermodynamische Erwartungswerte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Berechnung von thermodynamischen Erwartungswerten
  - Großkanonisches Ensemble (Teilchenzahl N variabel)

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle = \frac{Tr[\hat{U}\hat{\Omega}]}{Tr[\hat{U}]}, \qquad \hat{U} = e^{-\beta \hat{H}}, \qquad \beta = \frac{1}{T}$$

  - Kanonisches Ensemble (feste Teilchenzahl projiziert)

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle_A = \frac{Tr_A[\hat{U}\hat{\Omega}]}{Tr_A[\hat{U}]}, \qquad Tr_A[\hat{X}] = \sum_i \left\langle i \left| \hat{P}_A \hat{X} \right| i \right\rangle$$

Monte-Carlo Methoden
2: Zeitentwicklung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Behandlung von $e^{-\beta\hat{H}}$

  - Zweiteilchen-Komponente von $\hat{H}$ bildet nicht auf Modellraum ab
    ⇨ $\hat{H}$ muss Einteilchenoperator werden

  - Zweiteilchen-Komponente durch Einteilchendichteoperatoren ausdrücken
    ⇨ Quadratische Einteilchenoperatoren

  - Linearisierung der Operatoren durch HUBBARD-STRATONOVICH-Transformation

    ⇨ Zeitentwicklung berechenbar

Monte-Carlo Methoden
3: Zerlegung I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schreibe Zweiteilchenkomponente in JM-gekoppelter Form

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\sum_{J}\left[\left(1+\delta_{\alpha\beta}\right)\left(1+\delta_{\gamma\delta}\right)\right]^{1/2} V_J^N\left(\alpha\beta,\gamma\delta\right)\sum_{M}\hat{A}^{\dagger}_{JM}\left(\alpha\beta\right)\hat{A}_{JM}\left(\gamma\delta\right)$$

$$\hat{A}^{\dagger}_{JM}\left(\alpha\beta\right) = \sum_{m_\alpha m_\beta}\left(j_\alpha m_\alpha\, j_\beta m_\beta \middle| JM\right) a^{\dagger}_{j_\alpha m_\alpha} a^{\dagger}_{j_\beta m_\beta}$$

Paarerzeuger (-vernichter)

$V_J^N\left(\alpha\beta,\gamma\delta\right)$ Zweiteilchen-Matrixelemente

Monte-Carlo Methoden
3: Zerlegung II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Führe PANDYA-Transformation durch, Kopplung zu Teilchen-Loch-Dichteoperatoren ($\alpha\gamma$), ($\beta\delta$)

$$\hat{A}^{\dagger}_{JM}(\alpha\beta) = \sum_{m_\alpha m_\beta} \left(j_\alpha m_\alpha \, j_\beta m_\beta \middle| JM \right) a^{\dagger}_{j_\alpha m_\alpha} a^{\dagger}_{j_\beta m_\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\rho}_{KM}(\alpha\gamma) = \sum_{m_\alpha m_\gamma} \left(j_\alpha m_\alpha \, j_\gamma m_\gamma \middle| KM \right) a^{\dagger}_{j_\alpha m_\alpha} \tilde{a}_{j_\gamma m_\gamma}$$

$$\tilde{a}_{j_\alpha m_\alpha} = (-1)^{j_\alpha + m_\alpha} a_{j_\alpha, -m_\alpha}$$

$$\hat{H}_2 = \hat{H}_1^{'} + \hat{H}_2^{'}$$

$$\hat{H}_1^{'} = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon^{'}_{\alpha\delta} \hat{\rho}_{00}(\alpha\delta)$$

Einteilchenoperator

$$\hat{H}_2^{'} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{K} E_K(\alpha\gamma, \beta\delta) \sum_{M} (-1)^M \, \hat{\rho}_{K,-M}(\alpha\gamma) \hat{\rho}_{KM}(\beta\delta)$$

Monte-Carlo Methoden
3: Zerlegung III

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Einteilchen-Koeffizienten

$$\varepsilon'_{\alpha\delta} = -\frac{1}{4}\sum_{\beta}\sum_{J}(-1)^{J+j_\alpha+j_\beta}\frac{(2J+1)}{\sqrt{2j_\alpha+1}}V_J^N(\alpha\beta,\beta\delta)\sqrt{(1+\delta_{\alpha\beta})\ (1+\delta_{\beta\delta})}$$

- Teilchen-Loch-Matrixelemente

$$E_K(\alpha\gamma,\beta\delta) = (-1)^{j_\beta+j_\gamma}\sum_J(-1)^J(2J+1)\begin{Bmatrix} j_\alpha & j_\beta & J \\ j_\delta & j_\gamma & K \end{Bmatrix}$$

$$\times\frac{1}{2}V_J^N(\alpha\beta,\gamma\delta)\sqrt{(1+\delta_{\alpha\beta})\ (1+\delta_{\gamma\delta})}$$

- E_k diagonalisieren ⇨ Eigenwerte ($\lambda_{k\alpha}$) und –vektoren ($v_{k\alpha}$)

Monte-Carlo Methoden
3: Zerlegung IV

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schreibe i, j anstatt $(\alpha\gamma)$, $(\beta\delta)$

$$\hat{H}_2^{'} = \frac{1}{2}\sum_{K\alpha}\lambda_{K\alpha}\sum_{M}(-1)^M\,\hat{\rho}_{K,-M}(\alpha)\hat{\rho}_{KM}(\alpha)$$

$$\hat{\rho}_{KM}(\alpha) = \sum_i \hat{\rho}_{KM}(i)\; v_{K\alpha}(i)$$

- Definiere

$$\hat{Q}_{KM}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta_{M0})}}\left(\hat{\rho}_{KM}(\alpha) + (-1)^M\,\hat{\rho}_{K,-M}(\alpha)\right)$$

$$\hat{P}_{KM}(\alpha) = -\frac{i}{\sqrt{2(1+\delta_{M0})}}\left(\hat{\rho}_{KM}(\alpha) - (-1)^M\,\hat{\rho}_{K,-M}(\alpha)\right)$$

Monte-Carlo Methoden
3: Zerlegung V

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Zweiteilchen-Komponente auf diagonal quadratischer Form

$$\hat{H}_2' = \frac{1}{2}\sum_{K\alpha}\lambda_{K\alpha}\sum_{M\geq 0}(-1)^M\left(\hat{Q}^2_{KM}(\alpha)+\hat{P}^2_{KM}(\alpha)\right)$$

- Jetzt linearisieren:

$$\hat{H} = \varepsilon\,\hat{O} + \frac{1}{2}V\hat{O}\hat{O} \quad \Rightarrow \quad \hat{h} = \varepsilon\,\hat{O} + sV\sigma\hat{O}$$

- Beschreibung nur für Nukleonen, Herleitung auch in isospin-invarianter Form möglich

Monte-Carlo Methoden
4: HS – Transformation I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- HUBBARD-STRATONOVICH-Transformation

$$e^{-\beta\hat{H}} = \sqrt{\frac{\beta|V|}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \; e^{-(1/2)\beta|V|\sigma^2} e^{-\beta\hat{h}} \qquad \hat{h} = \varepsilon\,\hat{O} + sV\sigma\hat{O}$$

Hilfsfeld — Phase

- Interpretation

  System interagierender Zweiteilchen-Potentiale

  ⇩

  System unabhängiger Teilchen mit fluktuierendem Feld σ

Monte-Carlo Methoden
4: HS – Transformation II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beschreibung thermodynamischer Erwartungswerte

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle_A = \frac{\int d\sigma \;\; e^{-(1/2)\beta|V|\sigma^2} e^{-\beta\hat{h}} Tr_A[\hat{U}_\sigma \hat{\Omega}]}{\int d\sigma \;\; e^{-(1/2)\beta|V|\sigma^2} e^{-\beta\hat{h}} Tr_A[\hat{U}_\sigma]},$$

gewichtetes Mittel

- Problem auf Lösung der Integrale reduziert
- Kein Zweiteilchen-Problem, nur noch Einteilchenoperatoren

- Problem: Alle σ müssen abgedeckt werden

Monte-Carlo Methoden
4: HS – Transformation III

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher nur ein bestimmter Operator $\hat{O}$
  - Übergang zu vielen verschiedenen $\hat{O}_\alpha$

$$\hat{H} = \sum_{\alpha}^{A} \varepsilon_\alpha \hat{O}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha}^{A} V_\alpha \hat{O}_\alpha \hat{O}_\alpha$$

- Operatoren vertauschen im Allgemeinen nicht
  - Aufspaltung der Zeitentwicklung in viele kurze Intervalle

$$\Delta\beta = \beta / N_t$$

  - Linearisierung von $\hat{H}$ einzeln für jedes Intervall $\Delta\beta$

$$e^{-\Delta\beta\hat{H}} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^{N_t} \left(\frac{d\sigma_{\alpha n} \Delta\beta |V_\alpha|}{2\pi} \right) e^{-\Delta\beta \sum_\alpha |V_\alpha| \sigma_{\alpha n}^2} e^{-\Delta\beta \hat{h}_n}$$

Monte-Carlo Methoden
4: HS – Transformation IV

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kompakte Schreibweise als Verhältnis von Integralen

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle_A = \frac{\int D\sigma W_\sigma \Omega_\sigma}{\int D\sigma W_\sigma},$$

$$W_\sigma = G_\sigma Tr_A \hat{U}_\sigma \qquad \Omega_\sigma = \frac{Tr_A[\hat{U}_\sigma \hat{\Omega}]}{Tr_A[\hat{U}_\sigma]}, \qquad D\sigma = \prod_{n=1}^{N_t} \prod_{\alpha}^{A} \left(\frac{d\sigma_{\alpha n} \Delta\beta |V_\alpha|}{2\pi} \right)$$

$$G_\sigma = e^{-\Delta\beta \sum_{\alpha n} |V_\alpha| \sigma_{\alpha n}{}^2} \qquad \hat{U}_\sigma = \hat{U}_{\sigma N_t} \ldots \hat{U}_{\sigma 2} \hat{U}_{\sigma 1}$$

$$\hat{U}_{\sigma n} = e^{-\Delta\beta \hat{h}_n} \qquad \hat{h}_n = \sum_{\alpha}^{A} \varepsilon_\alpha \hat{O}_\alpha + s_\alpha V_\alpha \sigma_{\alpha n} \hat{O}_\alpha$$

Monte-Carlo Methoden
5: Monte-Carlo Integration I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösung der Integrale durch Berechnung an N_σ Stützstellen, an denen das Integral den größten Beitrag hat

- Definiere

$$P_\sigma = \frac{W_\sigma}{\int D\sigma W_\sigma}, \qquad \int D\sigma P_\sigma = 1, \quad P_\sigma \geq 1$$

als Wahrscheinlichkeitsdichte,
so dass <Ω> gewichtetes Mittel von Ω_σ ist, mit σ_k aus P_σ:

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle \approx \frac{1}{N_\sigma} \sum_{k=1}^{N_\sigma} \Omega_{\sigma_k}$$

- Vorteil: Unsicherheit sinkt mit $\sqrt{N_\sigma}$

Monte-Carlo Methoden
5: Monte-Carlo Integration II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Generierung der Samples σ_k für die Hilfsfelder
  - Startpunkt σ_0 frei wählbar
  - Iteration σ_k k=0,1,2,...
    mit Hilfe des METROPOLIS-Algorithmus (Random Walk)
  - Versuchsschritt σ_{k+1} mit Schrittweite δ
  - Annahmekriterium

$$r \geq 1 \qquad r = \frac{W_{k+1}}{W_k}$$

    - Falls r<1, akzeptiere Schritt mit Wahrscheinlichkeit r
    - sonst wird Schritt verworfen
  - Wähle δ, so dass 50% der Versuche erfolgreich

Monte-Carlo Methoden
5: Monte-Carlo Integration III

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problematik:
  - Samples nicht unabhängig voneinander
  - Korrelationslänge vom Problem abhängig

  ⇨ Verwerfe Zwischenwerte, um Korrelation aufzuheben

- Abhängigkeit vom Startpunkt:
  - Erzeuge zunächst eine Anzahl Samples, um zu „thermalisieren“

Monte-Carlo Methoden
Vorzeichenproblem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bisher angenommen:

$$W_\sigma \geq 0 \quad \forall \sigma$$

- Mit realistischem Hamiltonian oft nicht der Fall!
  - Vorzeichen von W_σ muss im Mittel nahe bei +1 liegen, damit Monte-Carlo Integration anwendbar ist

- Problemlose Hamilton-Operatoren:
  - gg-Kerne mit $V_\alpha<0$, N=Z uu-Kerne
- Problematisch
  - gu- oder ug-Kerne und $V_\alpha>0$

Monte-Carlo Methoden
Lösung des Vorzeichenproblems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Spalte Hamiltonian in „guten“ und „schlechten“ Teil

$$\hat{H}_G = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \hat{O}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{V_\alpha < 0} V_\alpha \hat{O}_\alpha \hat{O}_\alpha$$

$$\hat{H}_B = \frac{1}{2} \sum_{V_\alpha \geq 0} V_\alpha \hat{O}_\alpha \hat{O}_\alpha$$

1. Berechne $\hat{H}$ als Funktion des Parameters g für g<0:

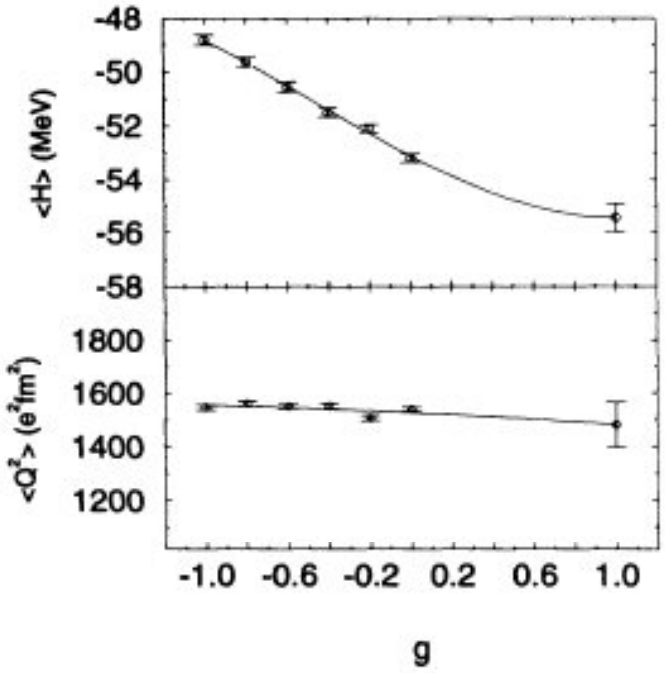
$$\hat{H}_g = f(g)\hat{H}_G + g\hat{H}_B$$

2. Extrapoliere Resultate zu g=1

Monte-Carlo Methoden
Vorzeichenproblem Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- ^{54}Fe (polynomische Extrapolation)
- <H> hat Minimum bei T=0, g=1



Y. Alhassid et al, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 613-616

Anwendungsbeispiele

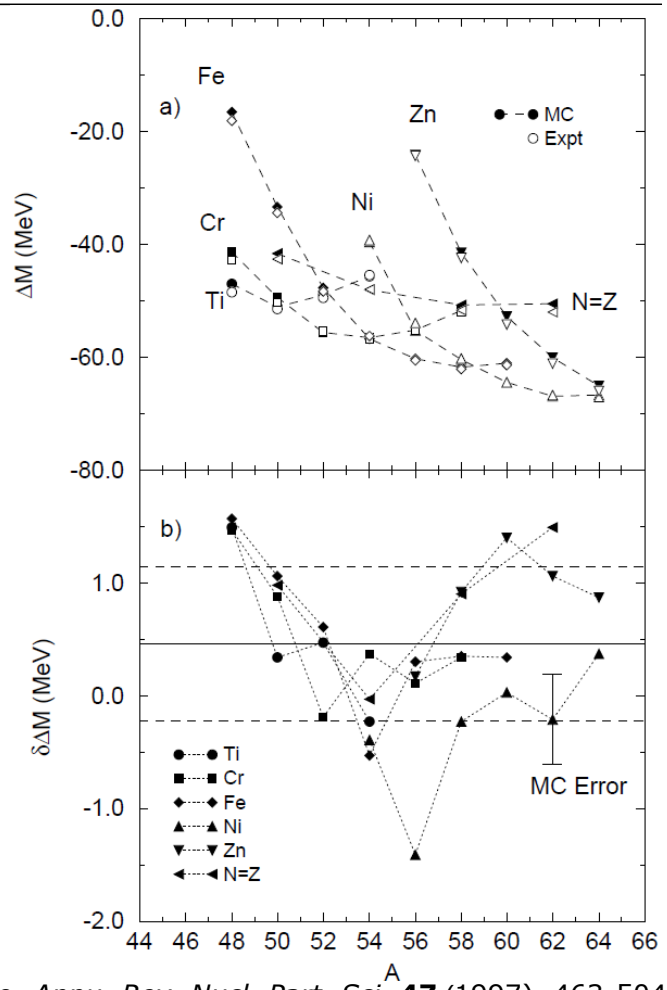
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bindungsenergien von gg-Kernen
- Thermische Eigenschaften
- Doppelter β-Zerfall
- Elektroneneinfangreaktionen + GT-Übergänge

Bindungsenergien

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Vergleich der berechneten Massendefekte ΔM mit Experiment
  - Rechnungen in der pf-Schale
  - Mittlere Abweichung ≈500 keV
  - auch Rechnungen mit zusätzlichem $g_{9/2}$-Orbital durchgeführt, ähnlich gutes Ergebnis

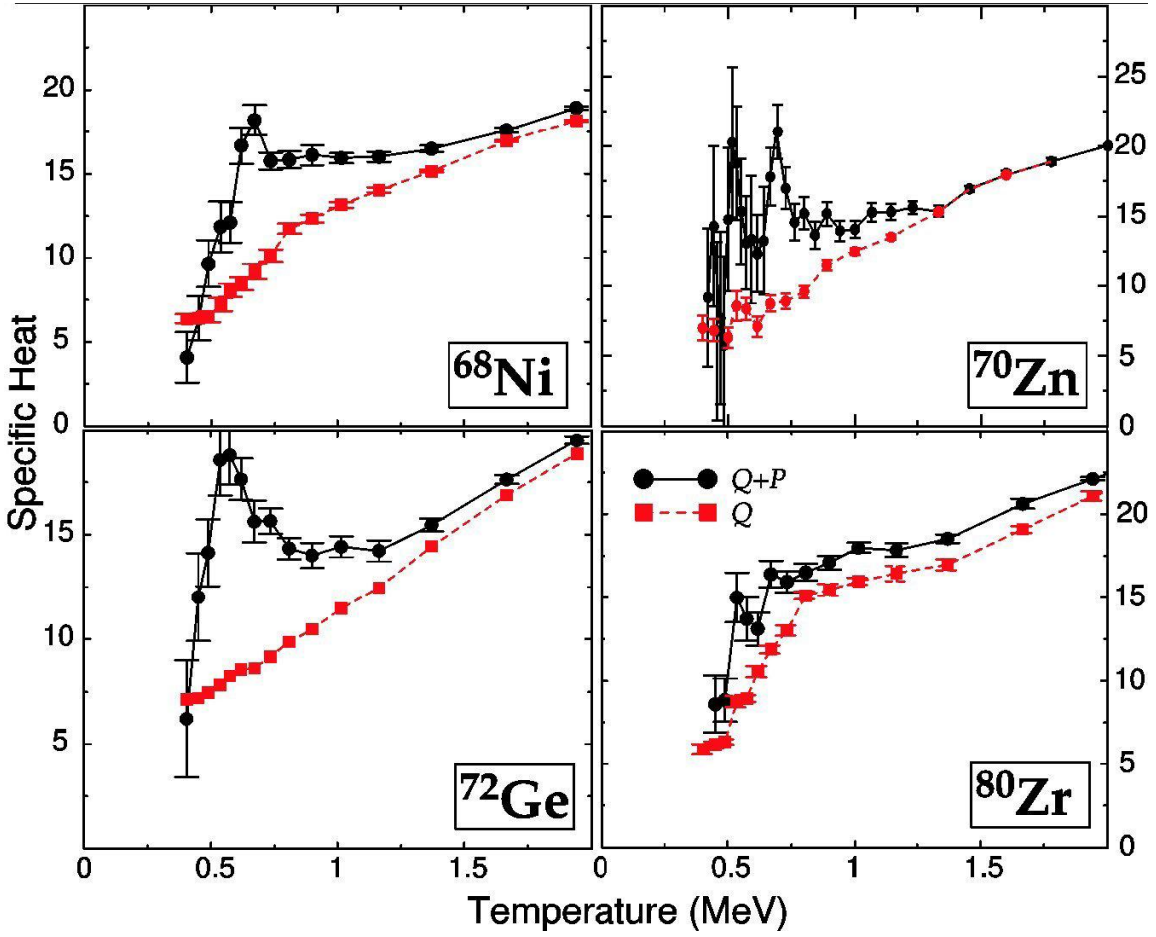


S. E. Koonin, D. J. Dean und K. Langanke, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **47** (1997), 463-504

Thermische Eigenschaften

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wärmekapazität
  - N=40 Isotone
    - Ohne Pairing
      - keine Peaks
    - mit Pairing
      - Stark erhöhte Kapazität durch Pairing-Effekte bei niedrigen T



K. Langanke, D.J. Dean and W. Nazarewicz, *Nucl. Phys.* A **757** (2005), 360

Doppelter β-Zerfall

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Prozess zweiter Ordnung

$$(Z, A) \rightarrow (Z+2, A) + 2e^- + 2\bar{\upsilon}_e$$

- Neutrinoloser Zerfall postuliert, falls ν_e Majoranateilchen ist

$$(Z, A) \rightarrow (Z+2, A) + 2e^-$$

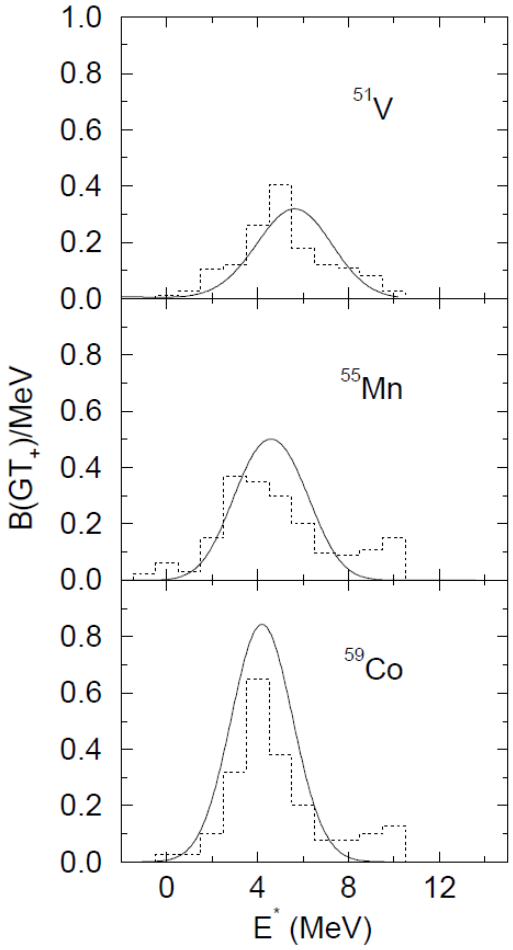
- Leptonenzahlverletzung!

- Für ^{76}Ge Matrixelement $M^{2\nu}$ für fpg-Schalen berechnet
  - Gute Übereinstimmung mit Experiment gefunden

Elektroneneinfang und Gamow-Teller-Übergänge

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- GT-Operator: $\langle \sigma\tau_+ \rangle$
  - Spin- und Isospinflip
  - Experimente ergeben fragmentierte Stärke
  - SMMC Rechnung liefert Schwerpunkte und Breiten
  - Gute Übereinstimmung

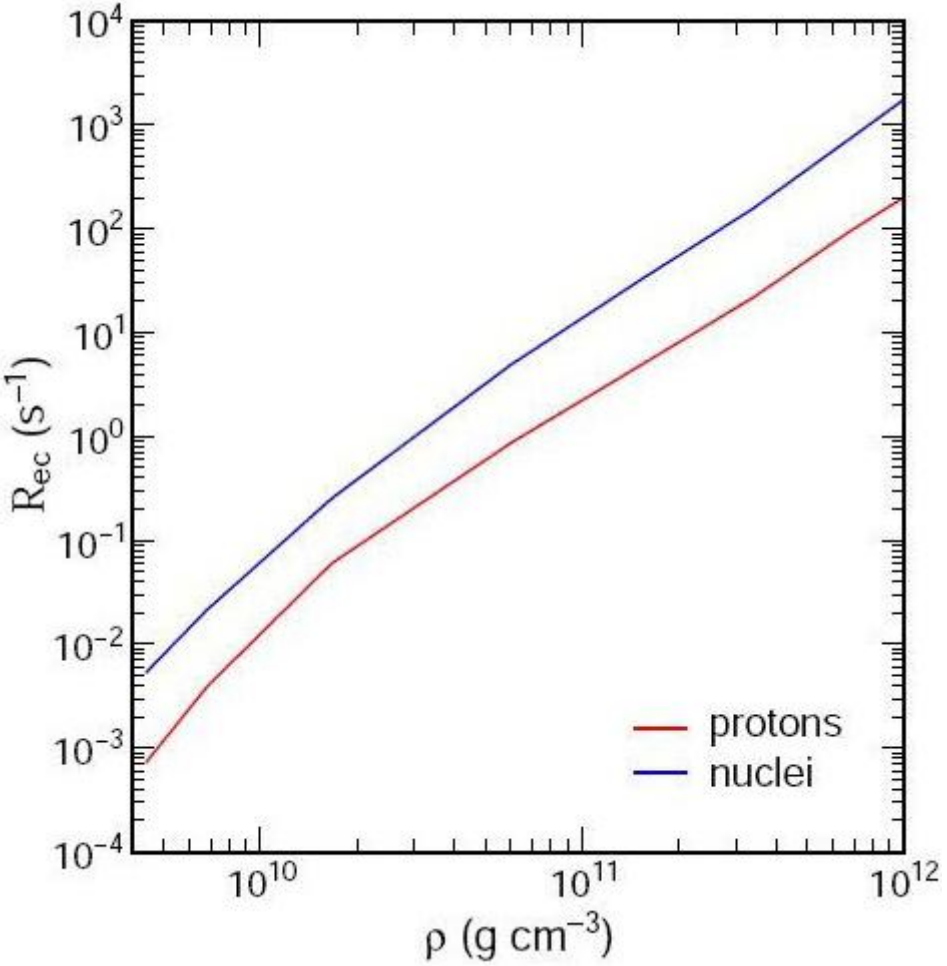


S. E. Koonin, D. J. Dean und K. Langanke, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **47** (1997), 463-504

Elektroneneinfang und Gamow-Teller-Übergänge

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Elektroneneinfang:
  - Im Vergleich zu IPM auch endliche Temperaturen im SMMC
  - Bestimmung von EC-Raten für N>40 möglich
  - Einfang an Kernen überwiegt wegen geringer Anzahl freier Protonen
  - Realistischere Simulation von Supernovae



K. Langanke

Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Problematik zu vieler Dimensionen bei klassischen SM-Rechnungen

$$D = \begin{pmatrix} N_s^p \\ N_v^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_s^n \\ N_v^n \end{pmatrix}$$

- Betrachtung von thermodynamische Erwartungswerte unter Zeitentwicklung in imaginärer Zeit

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle = \frac{Tr[\hat{U}\hat{\Omega}]}{Tr[\hat{U}]}$$

$$\hat{U} = e^{-\beta \hat{H}}$$

- Zerlegung des Hamiltonian in Einteilchen-Dichteoperatoren und anschließende Linearisierung durch HS-Transformation

$$\hat{H} = \varepsilon \hat{O} + \frac{1}{2} V \hat{O}\hat{O},$$

$$\hat{h} = \varepsilon \hat{O} + sV\sigma\hat{O},$$

- Monte-Carlo Integration zum Lösen der Integrale (Random Walk)

$$\left\langle \hat{\Omega} \right\rangle \approx \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} \Omega_s$$

- Lösung des Vorzeichenproblems

$$\hat{H}_g = f(g)\hat{H}_G + g\hat{H}_B$$

Ausblick

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechnungen mit größerem Modellraum möglich
  - Eigenschaften der Dipolriesenresonanz
  - Verhalten von Kernen bei Temperaturen über 1.5 MeV
  - Einfluss der Schwerpunktsbewegung
- Umgehung des Vorzeichenproblems
  - Behandlung von uu-Kernen unterhalb von 800 keV
- Realistischere EC-Raten
- Matrixelemente für doppelten β-Zerfall für andere Kerne
- Tests für IBM und RPA

Referenzen

- N. Metropolis et al and E. Teller, *Journal of Chemical Physics* **21** (1953) 1087-1092
- S. E. Koonin et al, *Phys. Rev. C* **48** (1993) 1518-1545
- Y. Alhassid et al, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 613-616
- W. E. Ormand, *Progress of Th. Ph. Supp.* No. **124**, (1996)
- S. E. Koonin, D. J. Dean, K. Langanke, *Physics Reports* **278** (1997) 1-77
- S. E. Koonin, D. J. Dean, K. Langanke, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **47** (1997), 463-504
- D. J. Dean et al, *Phys. Rev. C* **59** (1998) 2474-2486
- K. Langanke, D. J. Dean, W. Nazarewicz, *Nucl. Phys. A* **757** (2005) 360-372
- K. Langanke, *Nucl. Phys. A* **778** (2006) 233-246
- C. Özen, Introduction to SMMC Methods, *Helmholtz Int. Summer School* (2007) Dubna

Referenzen

- N. Metropolis et al and E. Teller, *Journal of Chemical Physics* **21** (1953) 1087-1092
- S. E. Koonin et al, *Phys. Rev. C* **48** (1993) 1518-1545
- Y. Alhassid et al, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 613-616
- W. E. Ormand, *Progress of Th. Ph. Supp.* No. **2** (1996)
- S. E. Koonin, D. J. Dean, K. Langanke, *Physics Reports* **278** (1997) 1-77
- S. E. Koonin, D. J. Dean, K. Langanke, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **47** (1997), 463-504
- D. J. Dean et al, *Phys. Rev. C* **59** (1998) 2474-2486
- K. Langanke, D. J. Dean, W. Nazarewicz, *Nucl. Phys. A* **757** (2005) 360-372
- K. Langanke, *Nucl. Phys. A* **778** (2006) 233-246
- C. Özen, Introduction to SMMC Methods, *Helmholtz Int. Summer School* (2007) Dubna

ENDE